С.А. Наумович, Ю.Н. Круглик, А.Ю. Круглик, А.П. Дмитроченко

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА ЗУБА ВО ВРЕМЯ ПРЕПАРИРОВАНИЯ

УО «Белорусский государственный медицинский университет»

В статье представлена математическая модель изменения температуры зуба во время препарирования.

**Ключевые слова**: математическая модель, препарирование, зуб.

**S.A. Naumovich, Y.N. Kruglik, A.Y. Kruglik, A.P.Dmitrochenko**

**MATHEMATICAL MODELLING OF TOOTH HEATING DURING PREPARATION**

The mathematical model of tooth temperature changes during preparation has been presented in the article.

**Key words**: mathematical model, preparation, tooth.

Для определения температуры, возникающей во время препарирования зубов и сокращения экспериментов по их препарированию, с помощью цветной термографии, нами разработана математическая модель этого процесса.

Математическая модель – это совокупность математических отношений и правил их использования, позволяющая по значениям исходных данных определить итоговые характеристики моделируемого объекта (в данном случае – процесса нагревания зуба при его препарировании). Установление максимально допустимого времени препарирования различных групп зубов возможно при проведении большого количества экспериментов в целях изучения различных сочетаний параметров этого процесса.

Материал и методы

В работе [1] приводится общее уравнение теплопередачи, которое имеет лишь иллюстративный характер. Для получения численного решения нами преобразовано общее уравнение теплопередачи в частное, то есть, приняли определенные единичные условия и решили его с учетом интересующей нас переменной. Для этого мы решили следующую задачу: определить допустимое время непрерывно препарирования зуба, при условии, что известные значения следующих параметров:

тип зуба – x1;

масса зуба – x2;

тип инструмента – x3;

частота вращения абразивного материала – x4;

давление инструмента на препарируемую поверхность – x5;

расстояние от препарируемой поверхности до границы полости зуба – x6;

начальная температура зуба – x7;

допустимая температура на границе пульповой камеры – x8.

Из всех перечисленных выше параметров последние два имеют фиксированное значение: x7=37oC, x8=41,5oC.

Обозначим через n1+n6 число значений перечисленных выше параметров n1+n6 . Тогда общее число экспериментов, которые необходимо провести для выработки рекомендаций, будет равно произведению n1x n2x n3x n4x n5x n6x. Для сокращения числа экспериментов была разработана математическая модель явления нагрева зуба при его препарировании.

Так как математическая модель должна описывать процесс нагрева тела, то в качестве исходного уравнения должно быть использовано общее уравнение теплопередачи [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} . \qquad (1)$$

Для получения численного решения необходимо преобразовать общее уравнение теплопередачи в частное, то есть, задавшись определенными граничными условиями, решать это уравнение с учетом начальных условий относительно интересующей нас переменной.

Граничные условия задаются в зависимости от геометрической формы тела и закона взаимодействия между окружающей средой и поверхностью нагреваемого (или охлаждаемого) тела.

Начальное условие в нашем случае задает закон распределения температур по всему объему тела в начальный момент. Переменной, относительно которой должно решаться уравнение, в нашем случае является допустимое время нагрева.

Из всего разнообразия вариантов граничных условий, для которых разработаны разрешимые математические модели в современной теории теплопроводности, наибольший интерес представляет один вариант, описанный А.В.Лыковым [1]. Им рассматривается полуограниченное тело, то есть ограниченное с одной стороны плоскостью. Примером такого тела может служить бесконечно длинный стержень с идеальной теплоизоляцией боковой поверхности. Стержнем в данном случае считается тело, у которого все сечения, перпендикулярные оси, одинаковы, то есть это не обязательно цилиндр.

Указанное предположение истинно и для зуба, так как объем, в котором развивается интересующий нас процесс (объем, заключенный между препарируемой поверхностью и сводом полости зуба), мал по сравнению с общим объемом нагреваемого тела.

И, наконец, предложение об идеальной теплоизоляции боковой поверхности стержня основано на том, что коэффициент температуропроводности воздуха, окружающего препарируемый зуб , значительно меньше, чем этот же параметр у дентина. В начальный момент температура во всех точках одинакова и равна То, то есть начальное условие имеет вид Т(x,o)= To=const. В участке контакта инструмента и зуба в начальный момент температура принимает значение Тс и поддерживается постоянной в течение всего процесса теплопередачи. При препарировании зуба температура в этом участке принимает некоторое мгновенное значение Тс (w,p,t), зависящее от частоты вращения инструмента w, давления его на обрабатываемое тело р и времени нахождения инструмента в данном положении относительно зуба t. Так как величины w и р можно достаточно точно контролировать при практическом препарировании, то определенному сочетанию значений этих величин будет соответствовать определенное значение Тс. Параметр t, зависящий от траектории движения инструмента, едва ли можно учесть при практическом препарировании в виде детерминированной величины. Поэтому мы полагаем, что величина Тс целиком определяется параметрами w и р, и отклонения от этой величины настолько малы и кратковременны, что ими можно пренебречь, усреднив распределение Тс по поверхности зуба.

Таким образом, все предложения о граничных и начальных условиях, использованных при выборе математической модели процесса, представляются нам достаточно обоснованными. Для определения допустимого времени препарирования необходимо преобразовать общее уравнение теплопередачи (1) в частное.

А.В. Лыковым дано решение этой задачи для случая охлаждения тела. Путем ряда преобразований получаем уравнение на нагревание:

$$\frac{T_c - T(x,\tau)}{T_c - T_o} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u} e^{-u^2}\, du\,, \qquad (2)$$

причем $u = \dfrac{x}{2\sqrt{a\tau}}$, (3)

где ТС - температура на торцевой (препарируемой) поверхности зуба; ТО - начальная температура (370С); Т(x, τ ) - температура на расстоянии Х от торцевой поверхности через время от начала препарирования; u - промежуточная переменная; α - коэффициент температуропроводности дентина, равный 0,183 мм2/сек [2,3].

В качестве аргумента функции используется не переменная u, а безразмерная величина, так называемое число Фурье Fo, которое определяется через ранее выведенные переменные следующим образом:

$$F0=\alpha*\tau/x2 \qquad (4)$$

Численное решение уравнения (2) находим при помощи графика (рис.1) через ранее выведенные переменные следующим образом выражение для u приобретает вид:

$u = \frac{1}{2\sqrt{Fo}}$, а уравнение (2) записывается в виде:

$$Q = erf\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo}}\right) \qquad (5)$$

где Q – относительная избыточная температура:

$$Q= (Tc – T (x, \tau )) / (Tc - To) \qquad (6)$$

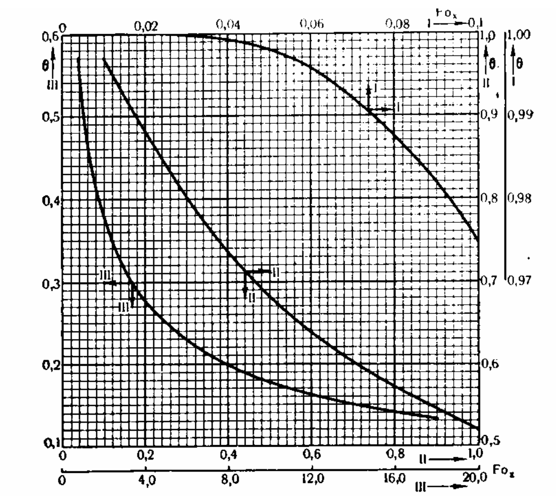


Рис.1. Зависимость между Q (безразмерная величина) и Fo (безразмерное время)

С помощью этого графика мы можем решить уравнение (5) относительно интересующей нас величины (на оси ординат Q, на оси абсцисс Fo ). При применении графика необходимо правильно выбирать шкалу, используя для этого стрелки с номерами I, II, III.

Например, дано: Tc=110oC, To=37oC, T(x, τ)=42 oC, x=5мм, α=0,183 мм2/сек. Найти время τ, через которое на глубине 5 мм будет достигнута температура 42 oC.

Решение. Найдем Q: Q = (Tc – T (x, τ )) / (Tc - To)=110-42/110-37=0,93.

Пользуясь графиком, по значению Q=0,93 находим Fo. Значение Q таково, что необходимо воспользоваться участком II графика. Таким образом, Fo=0,14.

Решаем уравнение (10) относительно τ: T= Fo x2/ α=0,14*52/0,183=19 сек.

Результаты и обсуждение

В данном примере τ может интерпретироваться как допустимое время препарирования.

Из выбранной математической модели следует, что для определения режима препарирования (материал и диаметр абразива, частота вращения, давление) значение Tc является постоянным. Если принять значение T (x, τ) равным 41,5 оС, то есть допустимой температуре на границе полости зуба, то левая часть уравнения (5) превратится в константу, значение которой будет полностью обусловливаться режимом препарирования. В данном случае и число Фурье Fo тоже приобретает вполне определенное значение, которое можно было бы найти из уравнения (2) путем замера температуры Tc. Однако технически проще определить Fo по формуле (4), замеряя для определенного значения расстояние распространения температуры T (x,τ) при препарировании экстрагированных зубов человека, что и было выполнено в экспериментах с применением жидких кристаллов.

Вывод

Таким образам, разработанная математическая модель позволила определить значения глубины распространения критической температуры 41,5 оС в продольных и поперечных распилах зубов различных функциональных групп при различных режимах препарирования, которые составлены различным сочетанием времени обработки, давления, частоты вращения, материала и диаметра абразива.

Литература

Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. М.: Высшая школа, 1967. 591 с.

Brown, W. S. Thermal properties of teeth / W. S. Brown, W. A. Dewel // J.Dent.Res. 1970. Vol. 49, № 4. P. 752–755.

Graid, R. S. Thermal conductivity of teeth structures, dentin, cements and amalgam / R. S. Graid, F. A. Peyton // J.Dent.Res. 1961. Vol. 40. P. 411–412.