

*А.Е. Крушевский,  
С.В. Иващенко*

## **Определение перемещений зуба с учётом изменений характеристик костной ткани альвеолярного отростка**

*Белорусский государственный медицинский университет*

Представлены данные о механической прочности костной ткани после воздействия низкочастотным ультразвуком и математическая модель работы корня зуба в нормальной и ослабленной костной ткани  
Ключевые слова: низкочастотный ультразвук, костная ткань, нагрузка, напряжение, математическая модель.

Ультразвук (УЗ) — упругие колебания и волны, частота которых превышает  $(1,5-2) \times 10^4$  Гц (15-20 кГц). Нижняя граница области ультразвуковых частот, отделяющая её от области слышимого звука, определяется субъективными свойствами человеческого слуха и является условной, поскольку верхняя граница слухового восприятия человека имеет значительный разброс для различных индивидуумов. Верхняя граница ультразвуковых частот обусловлена физической природой упругих волн, которые могут распространяться лишь в материальной среде, т. е. при условии, что длина волны значительно больше длины свободного пробега молекул в газах или межатомных расстояний в жидкостях и твёрдых телах. Поэтому в газах верхнюю границу частот ультразвука определяют из условия приблизительного равенства длины звуковой волны и длины свободного пробега молекул; при нормальном давлении она составляет примерно 10 Гц; в жидкостях и твёрдых телах определяющим является равенство длины волны межатомным расстояниям, и граничная частота достигает 10<sup>12</sup>-10<sup>13</sup> Гц. В зависимости от длины волны и частоты ультразвук обладает специфическими особенностями излучения, приёма, распространения и применения, поэтому область ультразвуковых частот удобно подразделить на три подобласти: низкие ( $1,5 \cdot 10^4$ -10<sup>5</sup> Гц), средние (10<sup>5</sup>-10<sup>7</sup> Гц) и высокие (10<sup>7</sup>-10<sup>9</sup> Гц). Упругие волны с частотами 10<sup>9</sup>-10<sup>13</sup> Гц, принято называть гиперзвуком.

Ультразвуковые волны применяются как в научных исследованиях для изучения строения и свойств вещества, так и для решения самых разнообразных технических задач. В связи с этим термин «ультразвук», или «ультразвуковая техника», часто используют для обозначения области науки и техники, занимающейся изучением и практическими применениями акустических волн и не имеющей целью непосредственное восприятие звуковой информации слуховой системой человека (соответствующий термин в зарубежной научно-технической литературе-*ultrasonics*). В таком понимании ультразвука его частотный диапазон не ограничивается снизу строго частотой 15-20 кГц, а может захватывать и часть слышимого диапазона частот. Ультразвук как область науки и техники является одним из разделов

современной акустики.

Ультразвуковые волны (неслышимый звук) по своей природе не отличаются от упругих волн слышимого диапазона, а также от инфразвуковых волн. В газах и жидкостях распространяются только продольные волны, а в твёрдых телах-продольные и сдвиговые.

Распространение ультразвука подчиняется основным законам, общим для акустических волн любого диапазона частот, обобщённо называемых обычно, звуковыми волнами, и описывается в первом приближении волновым уравнением, общим для всех частот. К основным законам распространения относятся законы отражения звука и преломления звука на границах различных сред, дифракции звука и рассеяния звука при наличии препятствий и неоднородностей в среде и неровностей на границах, законы волноводного распространения в ограниченных участках среды. Существенную роль при этом играет соотношение между длиной волны звука- $\lambda$  и характерным для условий его распространения геометрическим размером  $D$ -размером источника звука или препятствия на пути волны, размером неоднородностей среды, поперечного сечения волновода и т. д. При  $D \gg \lambda$  распространение звука вблизи препятствий происходит в основном по законам геометрической акустики, т. е. для описания звукового поля можно пользоваться законами отражения и преломления. Степень отклонения от геометрической картины распространения и необходимость учёта дифракционных явлений определяются параметром

$$R = \sqrt{\lambda r / D},$$

где  $r$  — расстояние от точки наблюдения до объекта, вызывающего дифракцию.

Скорость распространения ультразвуковых волн в неограниченной среде определяется характеристиками упругости и плотностью среды. В ограниченных средах на скорость распространения волн влияет наличие и характер границ, что приводит к частотной зависимости скорости, т. е. к дисперсии скорости звука. Уменьшение амплитуды и интенсивности ультразвуковой волны по мере ее распространения в заданном направлении, т. е. затухание звука, обуславливается, как и для волн любой частоты, расхождением фронта волны с удалением от источника т. е. переходом звуковой энергии в другие формы, и в первую очередь в тепловую. На всех частотах как слышимого, так и неслышимых диапазонов имеет место так называемое классическое поглощение, обусловленное сдвиговой вязкостью (внутренним трением) и теплопроводностью среды. Кроме того, почти во всех средах существует дополнительное (релаксационное) поглощение, обусловленное различными релаксационными процессами в веществе и часто существенно превосходящее «классическое» поглощение. Относительная роль того или иного фактора при затухании звука зависит как от свойств среды, в которой звук распространяется, так и от характеристик самой волны, и в первую очередь от её частоты.

При значительном возрастании интенсивности звуковых волн в их поле

заметнее проявляются различные нелинейные эффекты: нарушается принцип суперпозиции и возникает взаимодействие волн, приводящее к появлению комбинационных тонов; изменяется форма волны, спектр её обогащается высшими гармониками и соответственно растёт поглощение; становятся заметными постоянные силы и постоянные потоки вещества; при достижении некоторого порогового значения интенсивности ультразвука в жидкости возникает кавитация.

Специфические особенности ультразвука. Хотя физическая природа ультразвука и управляющие его распространением основные законы те же, что и для звуковых волн любого диапазона частот, он обладает рядом специфических особенностей, которые определяют его большое значение как и науке, так и в технике. Эти особенности обусловлены относительно высокими его частотами и соответственно малостью длин волн. Так, для высоких ультразвуковых частот длины волн в воздухе составляют  $3,4 \times 10^3 - 3,4 \times 10^5$  см, в воде  $1,5 \times 10^{-2} - 1,5 \times 10^{-4}$  см и в стали  $5 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-4}$  см; для самой низкочастотной области ультразвука длины волн не превышают в большинстве случаев нескольких см и лишь вблизи нижней границы диапазона достигают в твёрдых телах нескольких десятков сантиметров.

Малость длины волны обуславливает лучевой характер распространения ультразвуковых волн. Даже при относительно небольшой величине характерного размера  $D$  параметр  $R$  для среднего и высокочастотного диапазонов ультразвука невелик, из чего следует, что вблизи излучателя ультразвуковые волны распространяются в виде пучков, поперечный размер которых сохраняется близким к размеру излучателя. Попадая на крупные препятствия или неоднородности в среде, такой пучок (ультразвуковой луч) испытывает регулярное отражение и преломление. При попадании ультразвукового луча на малые препятствия или дефекты возникает рассеянная волна, что позволяет обнаруживать в среде весьма малые неоднородности, порядка десятых и сотых долей миллиметра.

Ультразвуковые волны затухают значительно быстрее, чем волны более низкочастотного диапазона, т. к. коэффициент «классического» поглощения звука (на единицу расстояния) пропорционален квадрату частоты. В низкочастотной области коэффициент релаксационного поглощения также растёт пропорционально квадрату частоты, однако при повышении частоты этот рост замедляется и коэффициент поглощения стремится к постоянной величине. Область, где наблюдается такое изменение хода коэффициента поглощения, называется релаксационной, а средняя её частота-частотой релаксации. Величина, обратная частоте релаксации, - время релаксации- характеризует процесс перераспределения энергии внутри вещества. Помимо характерного хода коэффициента поглощения ультразвука, в релаксационной области наблюдается рост скорости звука с частотой-дисперсия, обусловленная физическими процессами в веществе и отличающаяся от дисперсии скорости звука, характерной для любых частот и связанной с геометрическими условиями распространения волны. Дисперсия ультразвука в релаксационных

областях обычно не превышает нескольких процентов. В многоатомных газах релаксация связана с обменом энергии между поступательными и внутренними степенями свободы, и характерные частоты лежат в среднем и даже низкочастотном диапазонах. В жидкостях к основным релаксационным процессам относятся, например, внутримолекулярные превращения, структурная и химическая релаксации; соответствующие частоты лежат чаще всего в области частот 10-10Гц. В твёрдых телах имеются релаксационные процессы различной природы, обусловленные, например, взаимодействием ультразвука с электронами проводимости, со спиновой системой, с колебаниями кристаллической решётки. Влияние этих процессов проявляется в частотной зависимости поглощения ультразвука[5].

Для того чтобы выявить, какое влияние на физические свойства костной ткани оказывает низкочастотный ультразвук мы провели экспериментальное исследование.

Целью проведенного экспериментального исследования явилась оценка изменений состояния костной ткани альвеолярного отростка у кроликов, подвергшихся озвучиванию низкочастотным ультразвуком.

#### Материал и методы

Эксперимент проведен на 15 кроликах породы шиншилла одинакового веса и возраста. Кроликов разделили на три группы: две опытные-по 5 особей и одну контрольную из пяти особей. В первой и второй опытной группах проводили озвучивание (10 мин.) костной ткани и слизистой альвеолярного отростка нижней челюсти в области центральных резцов ультразвуком частотой 22 кГц и 44 кГц соответственно. Всем животным проведено по 10 процедур. Животные находились на стандартном рационе вивария. После окончания эксперимента животных выводили из опыта под наркозом. Брали участок нижней челюсти в области резцов, отделяли слизистую оболочку и надкостницу и фиксировали в 10%-ном растворе формалина.

Испытание образцов костной ткани на сжатие проводили по ГОСТ 4651-82 в Испытательном Центре ГНУ «Институт порошковой металлургии» на машине Instron-1195.

Брали образец костной ткани, высоту, ширину и толщину образца измеряли с погрешностью не более 0,01 мм., не менее чем в трёх местах. Для удобства образцу придавали форму параллелограмма с размером грани 5 на 8 мм. Скорость испытания указывали в нормативно-технической документации. Испытания проводили в условиях кондиционирования по ГОСТ 12423-66 при температуре  $(23 \pm 2)^\circ \text{C}$  и относительной влажности  $(50 \pm 5)\%$ . Устанавливали образец между опорными площадками так, чтобы вертикальная ось образца совпадала с направлением действия нагрузки. Регулировали машину до осуществления соприкосновения образца с площадками. Устанавливали выбранную скорость сближения опорных площадок. Машину приводили в действие и записывали значения определяемых показателей или кривую «нагрузка-деформация» при сжатии.

Разрушающее напряжение при сжатии ( $d_{cp}$ ), напряжение сжатия при

пределе текучести (d ст), напряжение сжатия при условном пределе текучести (d стy) и напряжение сжатия при установленной условной деформации (d сд) вычисляют в МПа по формуле:

$$\sigma = \frac{F}{A_0},$$

где F — нагрузки, соответствующие вычислению

$$\sigma_{cp}, \sigma_{ст}, \sigma_{стy}, \sigma_{сд}, N;$$

A<sub>0</sub> — площадь минимального начального сечения образца, мм<sup>2</sup>.

За результат испытания принимают среднее арифметическое всех параллельных определений, вычисленных до третьей значащей цифры.

Относительную деформацию сжатия при разрушении (dcp) и относительную деформацию сжатия при пределе текучести (d ст) вычисляют в процентах по формуле

$$\epsilon_{ст} = \frac{\Delta h}{h_0} \cdot 100,$$

где Δh — уменьшение высоты образца в момент разрушения или при пределе текучести, мм;

h<sub>0</sub> — начальная высота образца, мм.

За результат испытания принимают среднее арифметическое всех параллельных определений, вычисленных до второй значащей. цифры.

Стандартное отклонение (S) вычисляют по ГОСТ 14359 — 69, если в нормативно-технической документации на конкретную продукцию нет других указаний,

Результаты испытания записывают в протокол, который должен содержать следующие данные:

количество образцов;

способ кондиционирования и условия испытания в случаях, отличающихся от предусмотренных в настоящем стандарте;

способ измерения деформации;

скорость испытания.

Результаты и обсуждение

Данные исследования образцов костной ткани челюстей кроликов на сжатие приведены в табл.

Таблица

Показатели максимальной нагрузки и напряжения контрольных и опытных образцов костной ткани челюсти кролика

Образцы костной ткани	F <sub>max</sub> , Н	у <sub>сп</sub> , МПа
контроль	293,8±0,5*	9,3±0,53*
Опыт 22кГц	187,1±0,42*	5,1±0,33*
Опыт 44кГц	168,7±0,34*	4,6±0,28*

Примечание:

F<sub>max</sub> — максимальная нагрузка, предшествующая разрушению  
 у<sub>сп</sub> — напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению.

\*-статистически достоверные различия ( $p < 0,05$ ) при сравнении с группой «контроль».

Как видно из представленных выше данных, максимальная нагрузка, предшествующая разрушению, у всех образцов различна. Так по сравнению с контролем у кроликов, подвергшихся воздействию ультразвуком частотой 22 кГц, этот показатель меньше в 1,57 раза, а у кроликов, подвергшихся воздействию ультразвуком частотой 44 кГц-в 1,74 раза.

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, у всех образцов также различно.

По сравнению с контролем, у кроликов, подвергшихся воздействию ультразвуком частотой 22 кГц, этот показатель меньше в 1,82 раза, а у кроликов, подвергшихся воздействию ультразвуком частотой 44 кГц-в 2,02 раза.

Можно отметить, что с увеличением частоты озвучивания прочностные показатели костной ткани уменьшаются.

В практике ортопедической стоматологии возникают проблемы, связанные с необходимостью перемещений и поворотов зубов при наличии тех или иных дефектов зубного ряда. Однако ортодонтическое лечение у взрослых затруднено. Это связано с тем, что развитие и формирование челюстно-лицевого скелета уже завершено, костная ткань плотная и хорошо минерализована, сформированы артикуляционные взаимоотношения. Поэтому для оптимизации ортодонтического лечения в сформированном прикусе применяют физические факторы и лекарственные средства, направленные на деминерализацию и ослабление костной ткани альвеолярного отростка [1,4]. В связи с вышеуказанными проблемами требуется построение математической модели работы корня зуба в нормальной и ослабленной костной ткани. Так как при устранении дефектов зубного ряда основную роль выполняет костная ткань, то при построении модели будем учитывать только упругие характеристики костной ткани. Это означает, что в системе корень зуба – периодонт – костная ткань будем предполагать общее перемещение зуба, состоящим из суммы перемещения, вызванного упругими свойствами периодонта, и перемещения, возникающего вследствие податливости костной ткани.

Перемещения зуба с учётом только упругих характеристик периодонта, рассмотрены в ряде работ [2,3]. В настоящей работе рассмотрим деформированное состояние зуба с учётом упругих свойств костной ткани.

Как и ранее [2], будем предполагать, что корень зуба является абсолютно твёрдым телом по отношению к упругой костной ткани.

Пусть  $F(x, y, z) = 0$  есть уравнение поверхности корня зуба. Тогда упругие перемещения в области контакта корня зуба с костной тканью будем определять по формуле:

$$\vec{u} = (I' + 1)[u_0 \omega \times (r - r_0)] , \text{ где}$$

$$\vec{u} = iu_0 + jv_0 + kw_0$$

-вектор поступательного перемещения корня зуба,

$\vec{\omega} = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z$  - вектор поворота корня зуба,

$\vec{r}$  - радиус-вектор произвольной точки костной ткани,

$\vec{r}_0$  - радиус-вектор центра сопротивления зуба

Для точек лежащих на поверхности корня зуба  $F(x, y, z) = 0$  имеем перемещение костной ткани

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Для определения поступательных перемещений и поворотов корня зуба составляем условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на зуб, в том числе и напряжений, возникающих на поверхности контакта корня зуба и костной ткани.

$$\int_F \vec{n} \cdot T ds - \vec{P} = 0, \quad \int_F (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (T \cdot \vec{n}) \cdot ds - \vec{m} = 0, \text{ где}$$

$T$  - тензор напряжений,  $\vec{P}$  и  $\vec{m}$  соответственно главный вектор и главный момент внешних сил.

В качестве модели для корня зуба примем поверхность двуполостного эллиптического гиперboloида.

$$Z = H \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}$$

, где  $H$  - высота корня зуба,  $a, b$  - полуоси эллипса в поперечном сечении

$Z = H \sqrt{1 + d^2}$ ,  $d$  - параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

В результате решения уравнений равновесия получаем следующие формулы для поступательных перемещений  $U_0, V_0, W_0$  и углов поворота  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  вокруг осей координат зуба в костной ткани под воздействием произвольной силы  $\vec{P} = iP_x + jP_y + kP_z$ .

$$U_0 = \frac{P_x}{C_x}, \quad V_0 = \frac{P_y}{C_y}, \quad W_0 = \frac{P_z}{C_z}, \quad \omega_x = \frac{m_x}{\mu_x}, \quad \omega_y = \frac{m_y}{\mu_y}, \quad \omega_z = \frac{m_z}{\mu_z},$$

$C_x, C_y, C_z$  - жесткости зуба при поступательных перемещениях вдоль осей координат

$m_x, m_y, m_z$  - жесткости зуба при повороте зуба вокруг осей координат

Выпишем формулы для жесткости при поступательных перемещениях зуба

$$C_x = \pi G a b \left[ \left( \frac{\mathcal{H}^2}{2a^2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a^2} \right) d^2 \ln d \right],$$

$$C_y = \pi G a b \left[ \left( \frac{H^2}{2a^2} + \frac{\mathcal{H}^2}{b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{\gamma}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) d^2 \ln d \right],$$

$$C_z = \pi G a b \left[ \left( \frac{H^2}{2a^2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) d^2 \ln d \right], \text{ где}$$

$G$  - модуль сдвига костной ткани

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \nu - \text{коэффициент Пуассона};$$

$G$  - модуль сдвига костной ткани

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{ при } \nu = 0,5, \nu - \text{коэффициент Пуассона};$$

Как видим из формул для жёсткости, перемещения зуба обратно пропорциональны модулю сдвига костной ткани. Чем меньше модуль сдвига или модуль Юнга  $E=2(1+\nu)G$ , тем большие перемещения зуба возникают под действием одной и той же силы. Зависимость перемещения зуба от коэффициента Пуассона носит более сложный характер, но его влияние незначительно для сплошной костной ткани. Для губчатой костной ткани, когда коэффициент Пуассона достигает , это влияние существенно.

Дело в том, что упругая постоянная

обращается в бесконечность, а упругое состояние костной ткани переходит в пластическое состояние.

**Выводы**

1. Данные проведенного исследования и математические расчеты свидетельствуют о том, что в костной ткани подвергшейся воздействию низкочастотным ультразвуком перемещение зубов проходит быстрее.

2. При воздействии ультразвукового поля на костную ткань можно добиться таких характеристик, которые позволяют более легко и быстрее перемещать анамалии-стоящие зубы и добиваться желаемого результата лечения.

**Литература**

1. Котляров, В.С. Экспериментально-морфологическое исследование сравнительного действия ультразвуков разной частоты на уровне гистофизиологической микросистемы: Автореф. дис. на соиск. учён. степ. д-ра мед. наук. Киев, 1990. - 36с.

2. Крушевский, А.Е. Решение задачи о равновесии периодонта, ограниченного двумя эллиптическими двуполостными гиперболами / Теоретическая и прикладная математика. - Минск. Высшая школа, 1983. - Вып. 10. - с. 11-21

3. Наумович, С.А., Крушевский, А.Е. Биомеханика системы зуб-периодонт. Изд. Экономические технологии. Минск. 166с.

4. Улащик, В.С. Низкочастотный ультразвук: действие на организм, лечебное применение и перспективы исследования // Вопр. курортологии, физиотерапии и леч. физкультуры. - 2000. - №6. - С. 3-8.
5. Ультразвук. М.: «Советская энциклопедия», 1979. - 400с.