

С. С. Наумович¹, С.А. Наумович¹, С.В. Лемешевский², А.И. Шнип³
БИОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗУБОЧЕЛЮСТНОЙ СИСТЕМЫ

Белорусский государственный медицинский университет¹,
Институт математики НАН Беларуси²,
Институт тепло-массообмена НАН Беларуси³

В статье описана комплексная физико-математическая модель зубочелюстной системы, включающая зубы с произвольной геометрической формой, костную ткань челюсти, разделенную на зоны внутренней и наружной кортикальных пластинок и трабекулярную костную ткань. Десна включена в модель периодонта в виде эластического слоя плотно связанного с костной тканью. Модель периодонтальной связки рассмотрена в виде прослойки между цементом корня зуба и стенкой альвеолы неравномерной толщины и длины с упругими и вязкоупругими свойствами. Полученная модель является основой для разрабатываемого программного комплекса по индивидуальному биомеханическому анализу зубочелюстной системы.

Ключевые слова: математическая модель, периодонт, кости челюсти, напряженно-деформированное состояние, периодонтальная связка, вязко-эластические свойства.

S.S. Naumovich, S.A. Naumovich, S.V. Lemeshovsky, A.I. Shnip
BIOMECHANICAL MODEL OF DENTOALVEOLAR SYSTEM

A complex three-dimensional physical and mathematical model of the dentoalveolar system, which includes the teeth with an arbitrary geometrical shape, jawbone divided into zones with different mechanical properties: alveolar bone proper, cortical and trabecular bone has been described in the article. Gingiva is also included in the complex model of periodontium in the form of an elastic shell tightly attached to the bone. The model of the periodontal ligament is considered as an interlayer between root's cement and alveola of uneven thickness and length with elastic and viscoelastic properties. The resulting model will be the basis for the development of software for individual biomechanical analysis of dental system.

Key words: mathematical model, periodontium, jawbone, stress-strained condition, periodontal ligament, viscoelastic properties.

Принципиально новые возможности для прорыва в медицине, за счет возможности прогнозирования и оценки рисков будущего врачебного вмешательства, открывают достижения прикладной математики и информатики. Благодаря широкому внедрению методов математического моделирования при решении многих сложных задач и проблем отпала или значительно снизилась роль экспериментальной медицины [4].

Активное применение методов математического моделирования в различных отраслях науки в последнее десятилетие объясняется колоссальным развитием вычислительной техники и информационных технологий, что позволило получить реальные результаты расчетов сложных математических моделей биологических объектов. До эры персональных компьютеров метод зачастую ограничивался построением модели, которая представляет собой набор математических формул и не дает никакой конкретной информации. Сейчас же появилась возможность использовать метод с учетом его классической сущности, которая заключается в триаде «математическая модель – алгоритм-компьютерная программа».

Главная проблема при моделировании любой биомеханической системы - это корректная и адекватная постановка задачи, отражающая суть проблемы, учитывающая все основные особенности и ограничения. На современном этапе развития науки попытки создать всеобъемлющую модель для любого биологического объекта бесперспективны и нереальны, нужно уметь выделить суть, зерно. В этом состоит цель сотрудничества механика-математика и стоматолога [5]. При-

чем это сотрудничество не ограничивается только этапом работы над математической моделью, но продолжается при оценке полученных результатов, которые необходимо правильно понять и сделать соответствующие прогнозы. При построении математической модели любой биологической системы довольно сложно определить какие из анатомических образований, входящих в систему, необходимы для получения наиболее точного результата, а какие же компоненты могут не учитываться без искажения модели и сохранения ее адекватности. Например в стоматологии, если необходимо определить напряжения, возникающие в опорных тканях при протезировании мостовидными протезами, то модель вполне может быть ограничена наличием периодонтальной связки и челюстной кости. В случае применения любых типов съемных протезов невозможно получить адекватный реальности результат без включения в модель слизистой оболочки полости рта. После выбора компонентов математической модели необходимо определить общие подходы к рассмотрению каждого компонента и определить уровень сложности модели и ее приближенность к реальности с точки зрения анатомического строения и выполняемых функций. Так, при включении в модель костной ткани челюсти она может рассматриваться как сплошной однородный массив с линейными изотропными свойствами, т.е. вне зависимости от прикладываемой нагрузки кость одинаково деформируется во всех направлениях прямо пропорционально прикладываемой силе [10]. Однако возможен вариант рассмотрения в подобной ситуации нелинейной модели модели костной ткани с учетом наличия корти-

кальной и губчатой костных составляющих челюсти с различными участками минеральной плотности [6, 7, 8, 12]. Выбор модели и будущего результата в каждой конкретной ситуации должен основываться на стоящих перед исследователями задачах и, что очень не мало важно, на возможностях их решения [9]. Анализ трехмерных объектов со сложной геометрической формой требует значительных компьютерных ресурсов, которыми может располагать крупный научно-исследовательский центр, но они не всегда есть в наличии у практикующего врача на рабочем месте. Поэтому в некоторых ситуациях даже двухмерные упрощенные модели, которые учитывают геометрические размеры, свойства материалов и другие факторы, характеризующие биологическую систему, способны дать вполне адекватные результаты. Однако такие модели дают достаточное представление о биомеханике периодонтального комплекса только вблизи зуба. Если же необходимо оценивать напряжения на расстоянии от зуба, например в трабекулярной костной ткани, то следует использовать сложные трехмерные численные модели. Важным также является наличие в модели соседних зубов. Данным моментом нельзя пренебрегать, так как упрощенные модели, описывающие одиночные зубы (имплантаты), не включенные в участок челюсти, могут иметь лишь сравнительную ценность [5].

Для построения математической модели зубочелюстной системы механику-математику необходимы входные параметры, которые можно условно разделить на три группы [11]. Первая характеризует геометрические свойства объектов: размеры зубов, их пространственное взаиморасположение, размеры и положение периодонтальной связки, компактной и губчатой костной ткани и т.д. Вторая группа параметров описывает механические свойства тканей, и в случае рассмотрения упругих моделей к ним относятся модуль упругости (модуль Юнга) и коэффициент Пуассона [13, 14]. Эти величины являются математической интерпретацией особенностей гистологического строения органов человека. Наконец, к третьей группе относятся внешние нагрузки, действующие на зубочелюстную систему. Каждая группа параметров может рассматриваться в упрощенном виде либо с учетом всех особенностей анатомического строения и физиологии.

Цель работы. При разработке программного комплекса, позволяющего проводить индивидуальный биомеханический анализ зубочелюстной системы для выбора конструкции зубных протезов, необходимо было на первом этапе разработать адекватную реальности физико-математическую модель зубочелюстной системы с последующей численной реализацией.

Материал и методы

Математическая формулировка физико-математической модели вязкоупругих деформаций периодонта и упругих деформаций зуба и челюсти под действием заданной нагрузки на основе линейной изотропной теории упругости [1, 2] следующая: в областях, задающих периодонтальную связку и челюсть, находят решения следующих уравнений статической теории упругости

$$\operatorname{div} \mathbf{y}^{(\alpha)} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega^{(\alpha)}, \quad (1)$$

$$\mathbf{e}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{grad} \bar{u}^{(\alpha)} + \left(\operatorname{grad} \bar{u}^{(\alpha)} \right)^T \right), \quad (2)$$

$$\mathbf{y}^{(\alpha)} \left(\bar{u}^{(\alpha)} \right) = \bar{\mathbf{y}}^{(\alpha)} \left(\mathbf{e}^{(\alpha)} \left(\bar{u}^{(\alpha)} \right) \right) = \frac{E}{1+\nu} \left(\mathbf{e}^{(\alpha)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \mathbf{e}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{I} \right), \quad (3)$$

где

$\alpha = 1, 2$ — индекс, идентифицирующий область связки (1) или челюсти (2). Для перемещения зуба нужно найти шесть параметров

$$\{v_1, v_2, v_3, G_1, G_2, G_3\}, \quad (4)$$

которые через выражения

$$x_{T\beta}^{(i)} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\beta\alpha} \left(x_{T\alpha}^{(i)} - x_{\alpha}^g \right) + x_{\beta}^g + v_{\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, N_T, \quad (5)$$

$$u_{\beta}^{(i)} = x_{T\beta}^{(i)} - x_{T\beta}^{T_p(i)}, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, N_{T_p}, \quad \bar{x} \in \Sigma^{(1)} \quad (6)$$

задают граничные условия на границе «периодонтальная связка – зуб»

$$\sum^{(1)}$$

Нагрузка приложенная на зуб характеризуется вектором силы

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

и точкой приложения этой силы на поверхности зуба

$$\vec{x}^F = (x_1^F, x_2^F, x_3^F)$$

На границе поверхности $(\Sigma^{(1)})$ также должны выполняться еще два условия:

$$\int_{\Sigma^{(1)}} \mathbf{y}^{(1)} \cdot \vec{n} dS = -\vec{F}, \quad \bar{x} \in \Sigma^{(1)}, \quad (7)$$

$$\int_{\Sigma^{(1)}} [(\bar{x} - \vec{x}^g) \times \mathbf{y}^{(1)} \cdot \vec{n}] dS = -(\vec{x}^F - \bar{x}) \times \vec{F}, \quad \bar{x} \in \Sigma^{(1)} \quad (8)$$

На границе челюстной кости выполняются следующие условия:

$$\sum_{\beta=1}^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{x}) n_{\beta}(\bar{x}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{при} \quad \bar{x} \in \Sigma^{(2)}, \quad (9)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\bar{x}) n_{\beta}(\bar{x}) = f_{\alpha}^R(\bar{x}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{при} \quad \bar{x} \in \Sigma^{(3)}. \quad (10)$$

На границе сцепления периодонта и челюстной кости должны выполняться условия сопряжения

$$\mathbf{y}^{(1)} \cdot \vec{n} = \mathbf{y}^{(2)} \cdot \vec{n}, \quad \bar{x} \in \Sigma^{(S)}. \quad (11)$$

Таким образом математическая модель представляет собой смешанную задачу теории упругости с дополнительными условиями контроля (7), (8).

Вычислительный алгоритм решения задачи (1)-(11) содержит глобальный цикл. На каждом шаге цикла численно решается задача (1)-(6), (9)-(11). Затем проверяем выполнение условий (7), (8). Если они не выполнены, то меняем значения параметров (4) и повторяем описанный шаг. Для решения задачи на каждом шаге получаем чистую смешанную задачу теории упругости (1)-(6), (9)-(11).

Для задания граничных поверхностей нами используется некоторая их триангуляция. В этом случае расчетные области представляют собой многогранники и для численного решения смешанной задачи теории упругости удобно использовать неструктурированные сетки.

Имеется специальная триангуляция — *триангуляция Делоне* [3], которая обладает рядом оптимальных свойств. Одно из них заключается в стремлении полученных треугольников к равноугольным. Более точно отмеченное свойство формулируется следующим образом: при триангуляции Делоне максимизируется минимальное значение внутренних углов треугольников. Формальное определение триангуляции Делоне связывается со свойством, что для каждого треугольника все другие узлы лежат вне описанной окружности. Для нашего дальнейшего изложения очень важна связь триангуляции Делоне с диаграммой (разбиением) Вороного.

Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка соединяющего эти две точки. Поэтому многоугольником Вороного будет пересечение таких полуплоскостей для всех пар узлов, образованных данным узлом и всеми другими узлами. Подчеркнем, что этот многоугольник всегда выпуклый. Схематично диаграмма Вороного для некоторого набора узлов с выделением отдельного многоугольника Вороного отображена на рис.1.

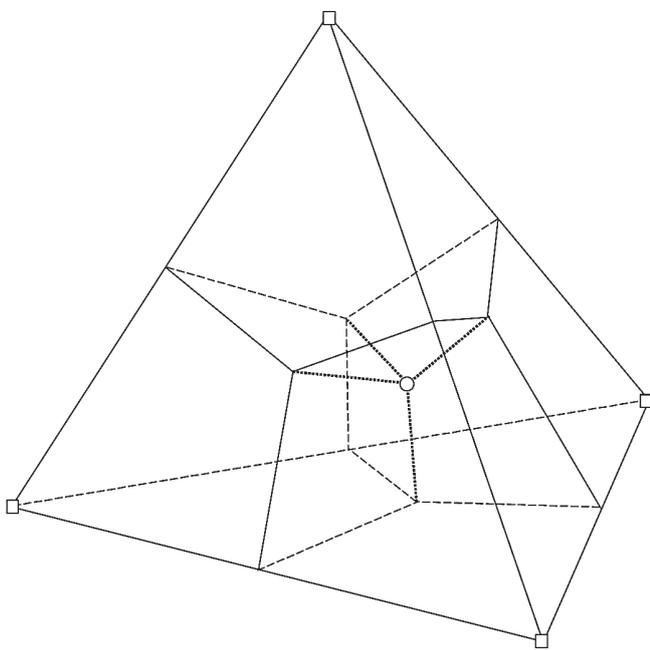


Рисунок 1 – Диаграмма Вороного для некоторого набора узлов

Результаты и обсуждение

Каждая вершина многоугольника Вороного является точкой встречи трех многоугольников Вороного. С каждой из этих вершин связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Это есть именно триангуляция Делоне. Тем самым между диаграммой Вороного и триангуляцией устанавливается взаимное соответствие.

При триангуляции Делоне мы получаем оптимальное разбиение расчетной области по заданному множеству узлов. Оптимальное с точки зрения максимизации минимальных углов треугольников. Триангуляции Делоне соответствует диаграмма Вороного, которая для каждого узла однозначно определяет множество точек области. Это выделение множества точек делается по совершенно прозрачному геометрическому критерию максимальной близости к узлу. Тем самым триангуляция Делоне и диаграмма Вороного полностью определяют (и определяют оптимально и однозначно) расчетную треугольную сетку и контрольный объем.

Триангуляция Делоне активно используется в вычислительной практике при построении схем конечных элементов. Имеется также много хорошо проработанных вычислительных методов генерации таких треугольных сеток, доступно и соответствующее программное обеспечение.

Наиболее простой (с методологической точки зрения) подход к построению дискретных аналогов на треугольных сетках состоит в использовании метода конечных элементов. Наиболее широко в вычислительной практике используются кусочно-линейные конечные элементы, которые соответствуют аппроксимации приближенного решения на каждом треугольнике линейной функцией. Другое дело, что не всегда можно ограничиться стандартными вариантами конечно-элементной аппроксимации. Это относится, в частности, и к вопросам построения сеточных аналогов операторов векторного анализа. В этой связи отметим варианты конечно-элементной аппроксимации для приближенного решения векторных задач – векторный метод конечных элементов. В этом случае векторные функции аппроксимируются напрямую, без перехода к декартовым компонентам.

Метод баланса (интегро-интерполяционный метод) является общим подходом к построению дискретных задач. На

его основе строятся схемы для базовых задач математической физики, механики сплошных сред. Метод баланса (интегро-интерполяционный метод) был предложен А.А. Самарским и с середины 50-х годов активно используется в вычислительной практике при численном решении различных прикладных проблем. В настоящее время в англоязычной литературе утвердился термин-метод конечного объема. Конструктивизм интегро-интерполяционного метода особенно сильно проявляется при построении разностных схем на нерегулярных сетках, в задачах с разрывными коэффициентами.

При аппроксимации дифференциальных операторов векторного анализа на регулярных сетках можно использовать прямые аппроксимации дифференциальных производных разностными при использовании декартовых компонент векторных величин. На общих расчетных сетках удобно использовать не дифференциальное представление операторов векторного анализа, а интегральное. При использовании триангуляции Делоне и разбиения Вороного и выбранных аппроксимациях скалярных и векторных функций проблемы аппроксимации операторов векторного анализа решаются достаточно просто, базируясь фактически на использовании интегральных определений и простейших формул интегрирования.

В смешанной задаче (1)-(11) теории упругости используются операторы дивергенции и градиента. Построив аппроксимации этих операторов на треугольной сетке и заменяя формально ими операторы дивергенции и градиента в дифференциальной задаче, мы, тем самым, построили разностную аппроксимацию исходной дифференциальной задачи (1)-(11). Для приближенного решения построенной разностной схемы используем хорошо известные итерационные методы решения систем линейных уравнений, так как сама разностная схема, аппроксимирующая смешанную задачу линеарной теории упругости, представляет собой систему линейных алгебраических переменных (СЛАУ).

Таким образом, построенная и численно реализованная трехмерная физико-математическая модель зубочелюстной системы пациента позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние периодонтального комплекса при выборе конструкций зубных протезов. Интеграция модели с системой обработки и распознавания изображений позволяет проводить индивидуальный математический анализ зубочелюстной системы. Спрогнозированные биомеханические процессы в зубочелюстной системе при различных типах ортопедических конструкций позволят избежать тех вариантов, которые будут вызывать зоны перегрузки в периодонтальном комплексе. Так как хроническая перегрузка приводит к расшатыванию опорных зубов, формированию очагов резорбции костной ткани и хроническому воспалению, что значительно сокращает срок службы и протезов, и зубов, то математический анализ при современных компьютерных ресурсах является дополнительным диагностическим тестом при составлении плана комплексной реабилитации стоматологических пациентов.

Литература

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. Т. 1, 2.
2. Ландау, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
3. Ласло, М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++ / М. Ласло. М.: Изд-во «Бином», 1997.
4. Матус, П. П. Математическое моделирование в биологии и медицине: аннот. справочник / П. П. Матус, Г. П. Рычагов. Минск: Белар. навука, 1997. 207 с.
5. Наумович, С. А. Биомеханика системы зуб-периодонт / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский. Минск, 2000. 168 с.
6. Dorow, C. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method / C. Dorow, F. G. Sander // J. Orofac. Orthop. 2005. Vol. 66, № 3. P. 208 – 218.
7. Geramy, A. Initial stress produced in the periodontal membrane by

orthodontic loads in the presence of varying loss of alveolar bone: a three-dimensional finite element analysis / A. Geramy // Eur. J. Orthod. 2002. Vol. 24, № 1. P. 21 – 33.

8. *Limbert, G.* A transversely isotropic hyperelastic constitutive model of the PDL. Analytical and computational aspects / G. Limbert [et al.] // Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin. 2003. Vol. 6, № 5 – 6. P. 337 – 345.

9. *Natali, A. N.* A multi-phase media formulation for biomechanical analysis of periodontal ligament / A. N. Natali [et al.] // Meccanica. 2002. Vol. 37, № 4 – 5. P. 407 – 418.

10. *Natali, A. N.* Evaluation of stress induced in peri-implant bone tissue by misfit in multi-implant prosthesis / A. N. Natali, P. G. Pavan, A. L. Ruggero // Dental Materials. 2006. № 22. P. 388 – 395.

11. *Pietrzak, G.* A nonlinear elastic model of the periodontal ligament and its numerical calibration for the study of tooth mobility / G. Pietrzak [et al.] // Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin. 2002. Vol. 5, № 2. P. 91 – 100.

12. *Provatidis C. G.* An analytical model for stress analysis of a tooth in translation / C. G. Provatidis // Int. J. Eng. Science. 2001. Vol. 39, № 12. P. 1361 – 1381.

13. *Provatidis C. G.* Parametric finite element analysis and closed-form solutions in orthodontics / C. G. Provatidis // Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin. 2002. Vol. 5, № 2. P. 101 – 112.

14. *Toms, S. R.* Quasi-linear viscoelastic behavior of the human periodontal ligament / S. R. Toms [et al.] // J. Biomech. 2002. Vol. 35, № 10. P. 1411 – 1415.

Поступила 30.06.2011 г.